Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Ejercicio 1. Sistemas lineales homogéneos (2–3 variables)

a)

$$\begin{cases} x' - x - 2y = 0, \\ 4x - y' + 3y = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' + y - y' = 0, \\ x + y' - y = 0. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 2z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = -x + y + 4z. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x - y, \\ z' = x - z. \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -2x + 5y. \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} y'' = 4x, \\ x'' = 4y. \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sistema lineal homogéneo con autovalores complejos

Resuelva el sistema y describa la naturaleza del equilibrio en $(0, 0)$:

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = -4x + 3y. \end{cases}$$

Ejercicio 3. Sistemas lineales completos con estabilidad

a)

$$\begin{cases} x'' - x - 2y = e^{2t}, \\ x + y' + 2y = 3e^{t}. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x' + 6x + 9y = 0, \\ 3x + y' + 2y = 2e^{2t}, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = \tfrac{1}{7}.$$

c)

$$\begin{cases} x' - 3x + 2y = 0, \\ y' - 2x + y = 6, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$$

d)

$$\begin{cases} x' - x + y' = 2t + 1, \\ 2x' + x + 2y' = 0. \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x'' + 2x - y = 4e^t, \\ 2x' - y' + 3y = t^2, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ y(0) = 2.$$

f)

$$\begin{cases} x' = 4x + y + e^t, \\ y' = 3x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

g)

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + \sin t, \\ y' = 4x - y - \cos t, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

h)

$$\begin{cases} x' = -4x - y + t, \\ y' = x - 2y + e^{-t}, \end{cases} \qquad x(0) = 2,\ y(0) = 0.$$

Ejercicio 4. Sistema lineal completo con entrada exponencial

$$\begin{cases} x' - 2x + y = e^{-t}, \\ y' + x + 3y = 4e^{-t}, \end{cases} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

1. Halle la solución general.
2. Determine la solución particular que satisface las condiciones iniciales.
3. Analice la estabilidad asintótica del equilibrio forzado.

Ejercicio 5. Modelo de oferta y demanda con expectativas de precios

Dado el siguiente modelo de mercado:

$$\begin{cases} Q_d = 42 - 4p - 4p' + p'', \\ Q_s = -6 + 8p, \\ Q_d = Q_s. \end{cases}$$

a) Plantear la condición de equilibrio.

b) Encontrar la solución general del modelo.

c) Indicar la solución particular para $p(0) = 6,\ p'(0) = 4$.

d) Analizar la estabilidad.

Ejercicio 6. Mercado con expectativas adaptativas y retardo de segundo orden

$$Q_d = 50 - 5p - 2\dot{p} + \ddot{p}, \qquad Q_s = -10 + 6p, \qquad Q_d = Q_s.$$

1. Derive la ecuación diferencial para $p(t)$.
2. Resuélvala y analice la estabilidad si $p(0) = 8,\ \dot{p}(0) = 0$.

Ejercicio 7. Modelo IS–LM

$$\begin{pmatrix} D + \alpha\varphi & \alpha b \\ -\beta k & D + \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A \\ -\beta L_s \end{pmatrix},$$

con $\alpha, \varphi, \beta, b, k, l > 0$.

a) Encontrar las raíces del sistema.

b) Determinar el equilibrio de largo plazo.

c) Realizar el diagrama de fases y clasificar la solución.

Ejercicio 8. Modelo IS–LM con política fiscal contraproducente

$$\begin{pmatrix} D + a & b \\ -c & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 e^{kt} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d, k > 0.$$

1. Encuentre las raíces características.
2. Obtenga la solución general.
3. Discuta cómo k influye en la trayectoria de $y(t)$.

Ejercicio 9. Clasificación local vía Jacobiano

Considere el sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Para cada caso, realice el diagrama de fase y determine la naturaleza del equilibrio:

a) $f_x = 0,\ f_y > 0;\ g_x > 0,\ g_y = 0.$

b) $f_x = 0,\ f_y < 0;\ g_x < 0,\ g_y = 0.$

c) $f_x < 0,\ f_y > 0;\ g_x < 0,\ g_y < 0$ con $|g_x/g_y| \geq |f_x/f_y|$.

Ejercicio 10. Estabilidad local de sistemas no lineales

a)

$$\begin{cases} x' = x^3 + 3x^2 y + y, \\ y' = x\,(1 + y^2). \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = 1 - e^y, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x' = e^x - 1, \\ y' = y\, e^x. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

I) Analice la estabilidad del sistema linealizado.

II) Dibuje el diagrama de fase.

Ejercicio 11. Linealización y criterio de Routh–Hurwitz

Sea

$$\begin{cases} x' = P(x,y), \\ y' = Q(x,y), \end{cases} \qquad P, Q \in C^2,\ P(0,0) = Q(0,0) = 0.$$

1. Demuestre que si $\operatorname{tr}(J) < 0$ y $\det(J) > 0$ entonces $(0,0)$ es localmente asintóticamente estable.
2. Construya P, Q específicos (no triviales) que verifiquen estas condiciones y confirme con el campo direccional.

Ejercicio 12. Modelo de Lotka–Volterra (presas–depredadores)

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = \delta yx - \gamma y, \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

a) Encontrar los equilibrios mediante el diagrama de fase.

b) Determinar la estabilidad linealizando el sistema.

Ejercicio 13. Competencia logística (Lotka–Volterra modificado)

$$\begin{cases} x' = x\,(1 - x - y), \\ y' = y\,(0{,}5 - 0{,}25x - y). \end{cases}$$

1. Encuentre todos los equilibrios.
2. Clasifíquelos mediante el Jacobiano.
3. Bosqueje el diagrama de fase.

Ejercicio 14. Sistema depredador–presa con cosecha constante

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y) - h, \\ y' = y(\delta x - \gamma), \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, h > 0.$$

1. Determine condiciones sobre h para que exista un equilibrio interior $(x^{,y)}$.
2. Analice su estabilidad mediante linealización.

Ejercicio 15. Sistema SIR simplificado

$$\begin{cases} S' = -\beta SI, \\ I' = \beta SI - \gamma I, \\ R' = \gamma I, \end{cases} \qquad S + I + R = N,\ \beta, \gamma > 0.$$

1. Reduzca el sistema a dos ecuaciones usando $S + I + R = N$.
2. Determine el umbral $R_0 = \beta N/\gamma$ y discuta $R_0 < 1$ y $R_0 > 1$.

Ejercicio 16. Interacción inflación–desempleo con expectativas

$$\begin{cases} \pi = a - T - bU + \pi^e, & a < 0,\ T > 0,\ b > 0, \\ \dfrac{d\pi^e}{dt} = j\big(\pi - \pi^e\big), & 0 < j \leq 1, \\ \dfrac{dU}{dt} = -k\big(m - \pi\big), & k > 0. \end{cases}$$

a) Hallar (π, π^e, U) de equilibrio.

b) Diagrama de fase y caracterización.

c) Para $a - T = \frac{1}{6},\ b = 3,\ j = \frac{3}{4},\ k = \frac{1}{2}$, hallar las trayectorias de equilibrio.

Ejercicio 17. Dinámica del capital de Solow con progreso tecnológico

Sea $k(t)$ el capital por trabajador efectivo y $A(t)$ la productividad:

$$\begin{cases} k' = sk^\alpha - (n + g + \delta)k, \\ A' = gA, \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1,\ s, n, g, \delta > 0.$$

1. Reescriba el sistema en variables (k, A).
2. Encuentre el estado estacionario k.
3. Linealice alrededor de k y determine la estabilidad.

Ejercicio 18. Ciclo salarial–empleo de Goodwin

$$\begin{cases} \dot{u} = u(\beta - \gamma v), \\ \dot{v} = v(\lambda u - \mu), \end{cases} \qquad \beta, \gamma, \lambda, \mu > 0.$$

1. Halle los puntos de equilibrio.
2. Verifique la existencia de ciclos cerrados (use una primera integral).